

國立中央大學理學院數學系

105 學年度

【教學傑出暨優良獎】推薦



方 向

國立中央大學 105 學年度【教學傑出暨優良獎】推薦表

推薦單位：數學系

推薦日期：106 年 4 月 25 日

被推薦人	方向	職別	教授	任教起始 年 月	102 年 8 月
教學傑出暨優良事蹟					
評審項目		具體事蹟			
教學特色		請見附件			
創新教學					
數位教學(使用數位科技教學、自製完整之數位課程或教材、設計提升學生學習興趣及成效的數位教學活動、提供同儕間互相學習之平台)					
校外相關教學獎勵(個人得獎、帶領學生參與競賽等)					
其它特殊貢獻					
單位主管簽章：		院長(總教學中心主任)簽章：			

今年是我來中大第四年。此前我在四所學校有過十一年上台講課的經歷 (Texas A&M U., U. of Florida, U. of Alabama, Kansas State U.) 若加上從民國 88 年在 Washington U. (St. Louis) 當助教開始，則站在講台迄今已十八年。另外還有在中國大陸，美國，台灣給質優中學生講授奧林匹亞數學，各地暑期學校給研究所講授短期高階課程，及在台灣指導武陵高中科學班數學組課外研究。事實上我對教學很早就有興趣，大二時即開始家教，一對一輔導北京人大附中的質優高中生。所輔導的學生還曾經在輔導期間拿過全北京競賽第一名。另一個難忘經歷是在美國單獨輔導過黑人家庭小孩。父親是音樂教授，小孩他也很有音樂天份，但數學卻九九乘法表都弄不清楚。各類教學經驗讓我覺得豐富了人生，讓我和學生一同在成長。

作為一名理論數學研究者，我一直認為我的研究更多的是滿足我自己的好奇心，而對社會沒有直接貢獻。所以我總是把教學看成是我對社會的直接貢獻，一直饒有興趣怎麼能更好的改進我的教學。所以這一次系裡面推薦我參與優良教師的評選，我是很樂意跟大家分享及探討教學的理念及樂趣。

我來中大的前三年都有教一年期的外系的大班微積分。到去年有老師建議說我可以考慮多教一些數學系自己的學生，所以第四年開始沒有教外系微積分。

我的教學理念十多年來有過多次演化，但近年來已很穩定。簡而言之，一句話：“Start where they are.” 即我不會預先假設“他們應該要有什麼樣的態度，每天應該讀多少小時的書，應該要做多少作業”。我會先盡力了解他們的可能可以花在這門課上的時間，他們對這門課的期待，他們的理解能力，他們的知識準備，然後設計適合他們的教學方法。即使是同一門課，教材相同，不同學期的學生都有差別，所以我不同學期都會調整不同的教法。

我相信人對學問其實都是有興趣的，只要引導的合宜。正如健身房裡面教練會說最合適的重量是盡全力能做八到十個動作的重量。太重或太輕都不好。所以對我而言，最重要的一件事，就是抓準他們的“體能”，找准他們的“重量”。

當然，一個挑戰是即使都是在中大，同一門課，不同學期，學生的接受度其實很不一樣。更不用說同一班級裡一百多人，程度迥異。

下面我先分享一些我在中大前三年教外系大班微積分的一些嘗試。

首先我了解到我的學生高中的基礎其實不錯，很多還已經接觸過一個學期的微積分。所以對老師按部就班從頭講起並沒有興趣。他們缺乏的是實際使用理論解決問題的操練。這也是他們所在科系對他們的期待。而且因為不是數學系，他們不需要也沒有太多的興趣學習所有的證明。

同時我了解到，通常的教法還是把書上的證明及例子講一遍，學生回去自己做習題。因為例子較多，課上常常沒時間講完，所以還要趕進度。我決定放棄將課本內容按順序走一遍的方法，而自己將重要內容挑出來，做成 drill sheet。然後印出來，每人發一張。

如附件 A 是學期剛開始的一張 drill sheet。很多內容很多同學在高中已經熟悉。按部就班的講很花時間，而且對他們是無聊的事情。我將要點設計成“選擇”和“填空”。請他們先自己完成。這樣會的人有成就感，不會的人思考過後也會消化的比較好。

而且因為每人都有講義，可以直接在上面計算，節省許多黑板時間。

另外附件 A 上還有三道 exercises. 我不會全講。因為在做“選擇”和“填空”時，學生有快有慢。這樣有人就有多出來的時間。這些人就鼓勵他們當場三道習題都做掉。而慢的同學做出一道就很好了。

附件 B 則是我處理課本上比較複雜例子的典型方式。我會將書上題目截下來，然後將大段的解答內容截取少數關鍵地方。將要點變成問號“？”，然後請他們嘗試自己找答案。留有空白的地方則是讓他們寫筆記。

等幾分鐘之後，我會在黑板上解釋。基本上，如果學生先思考過，我再解釋，理解效果明顯比較好。

而且因為是書上的例子，書上就有傳統的解答。課後再對比講義和課本，對理解兩者都有幫助。

另外，同樣的，這一頁底部有一道比較難一點的，但類似的習題。供動作快的人當場練習。而動作慢的把之前的東西弄清楚就很好了。

所以平均而言我每次課之前都會設計四到六張 drill sheet，差不多當天

可以講完，但會留一些難一點的題目，讓他們自由嘗試。這樣下來，每個學生在課上操練到的“重量”，大概都可以適合他們自己的現狀。每年根據學生程度，我會調整 drill sheet 的難易。所以雖然是同一門課教了三年，我每次都重新設計，三年共做了八百多張。如第三年教資電的 drill sheet，就比第一年教大氣的難度要高，題目要多。因為兩系的學生程度有差。（對不起這麼說大氣的。）每學期結束很多學生將約一百三十多張（認真思考過，寫滿字的）講義釘在一起，大家都比較有成就感。

另一個發 drill sheet 的好處是學生每次上課能領到一些實際的東西（學生似乎對領東西很期待），而且設計的和課本上有所不同，每次都有一些新鮮感。

對於偶爾缺課的同學，因為學生很明確的知道他沒來上課錯過了什麼，drill sheet 都是整學期連續編號的。所以找同學要上次課的 drill sheet 並且補上的意願很高。

及時回饋：我相信學習任何一項專業技能的一個重要原則是“instant feedback”，即在學生獨立練習的當場，立刻讓他們知道對錯。而現在常見的做法是老師講理論/例子之後，學生回去自己複習，然後做作業，下週交上來，老師帶回去給助教改，再下次課發回。實際效果是學生有時已經忘了上次做了什麼，發回之後沒必要，所以常常也沒有興趣再看。反正分數在那裡啦。所以可能最開始就做錯了，但錯誤已經被遺忘，不會有被改正的機會。這不符合“instant feedback”的原則。

所以為了實踐“及時回饋”，上課時我寧可減少課本上幾個例子，也要在兩節課中留出譬如二十分鐘讓他們當場做習題。尤其是如附件 C。這是一個他們需要大量做習題的章節。採用傳統課上例子，課後習題的方式他們的訓練量幾乎肯定不太夠。而經驗表明交由學生下課後自己做習題的效果很不好。因為 drill sheet 讓我節省大量黑板時間，我可以安排課上做習題。這時我會在教室巡迴走動觀察，指出他們的問題。常常只要一句話，就可以澄清一些疑點。以往經驗是，即使只有二十分鐘，夠我在教室走兩三個來回。走道邊的每一個學生，我都會至少花幾秒鐘看一下他們做的情況。這樣做另外的兩個好處是：當看到老師站在他們身邊觀察他們時，學生很願意當場問他們的疑點，及全班一起練習時，他們常常自發形成小組討論。所以每次集體做習題時間，都是很多學生興奮的時間。

我知道學校有嘗試引入一些及時互動的教學系統。也有開一些 workshop。但對於我參加之後的一個遺憾就是，這些系統似乎只適合需要文字（甚至或影音）溝通的科目，對需要使用數學符號的科目助益有限。我有請教廠商，但他們似乎沒有意願開發可以及時輸入數學符號的軟體。

習題時間我在教室內的挨個觀察，也讓我多了很多與學生一對一互動的機會。這是很在乎的。我的“野心”是每一個人都很重要，我希望照顧到每一位同學。雖然這樣的努力注定會有很多令人不滿意的地方，但目前四年下來，我至少可以說，我跟每一位上過我課的同學都一對一的聊過幾句。某種意義上，我崇尚“精英教育”：每個人都是精英，即使在大班上，我也盡力實踐這樣的理念。

另外一個單獨接觸學生的方式是，我堅持每週自己一個一個大聲叫名字，發作業。叫名字讓他們走上前來領幫助我同時記住學生的名字和相貌。我也相信學生的名字在班上被大聲叫出來對他們是一個正面的激勵。然後我會請助教把做的最好的約五份作業，和最差的幾份作業預先挑出來，他們領作業時和他們聊幾句，鼓勵或勸勉。這樣做比較花時間，所以我一般是利用上課提早去，課間休息，和課後，分幾次發完。

另外一個記住每名學生的方式是做一個 slide show。我覺得一個學生花半年或一年坐在我面前，聽我講東西，我有一種使命感，要記住他們。所以我會請助教將每名學生的大頭照從 portal 學生名冊下載下來，用他們的名字命名，然後將名字寫在上面。（如右圖；附件 D 是某個班部分同學的電腦截圖）全班大頭照放在一個 folder 之後，我會有意的抽時間來跑 slide show，以便快速記他們的名字。（也許學校可以幫每個老師提供這種協助。因為我從 portal 下載下來的大頭照通常比較小。）



上述努力效果似乎不錯。在我來中大第一個學期之後就有收到一封來自教務長的感謝信（見附件 E）。這是我第一次教台灣學生，也是我第一次用中文講課，這封信讓我倍受鼓勵，隨後也更加用心。在第二年，第三年，選我的微積分的人數突增。學生回饋說我的課在網路上有較多的討論，以致雖然微積分每個班都有他們建議的選課時間，但還是不少人來拿密碼卡，希望能選上。有幾個學期開學時走道上也坐滿了人，最後是系辦吳昭穎小姐用強制退選將晚選課的同學退掉，才控制好人數。

目前我在數學系大學部教過兩次複變函數。如果根據“start where they are”的原則，他們與微積分的情況大相逕庭。所以我設計的教學方式也迥異。

複變函數對很多學生而言，這只是他們畢業前最後一門必修課。經過三年或四年學習，他們中大多數已決定將來不會繼續理論數學的學習。（這對數學系是正常的。）而且我教的都是下學期（他們上學期有同樣的課可選），很多人是因為另一門準備性的必修（高微）未過，所以上學期被擋修。應該說不少人只關心期末有沒有六十分。但這同時也是理論上非常漂亮的一門課，有唯美的感覺。少數立志在數學上繼續深造的同學對它很有興趣。同時也有一些對複變在 engineering 和 physics 上應用有興趣的同學。

複變的另一個特點是整個理論環環相扣，證明比較多。如果開始沒有跟上，到後來就只能是坐在教室等下課。若有學生等到考試前才開始用功，則大概已經來不及了。

針對以上情況，我決定取消傳統的期中，期末考試，改而設計了一套小考系統。要點如下（請不要被第一條嚇到；他們其實很喜歡這一條）：

1. 每週小考；每次只分“過”與“不過”；（基本）全對才算過；整學期每一次都過，期末才会有分。最後所有小考算成 50 分。即要么拿零分，要么拿 50 分。（注：這項設計我已在中大四個班上嘗試過，還沒有發生拿零分的情況。原因馬上解釋。）

我設計的理想是把整個課程我認為基本的，重要的定理，每一個人都要及時掌握，這樣整個學期自然有效率。如附件 F 是本學期最近一次小考。包含複分析中三個漂亮而重要的定理。我認為如果整學期所有小考內容都能獨立答出來，當然應該及格。這裡的 50 分幾乎保證他們能及格。（我非常在乎高年級必修課不能及格的問題。因為因此導致不能按時畢業的問題，會成為許多家庭的痛苦。對此我有切膚之痛。所以我會從學期開始盯著他們，只要能在我的班上堅持下來，到學期結束之前，他們自己都知道這門課幾乎肯定過了。）當然問題的核心是如何讓這個理想變得可行，尤其是在學生主動性明顯比微積分班上差一些時。

2. 每次小考的題目預先（準確的）告知。我所希望的解答的要求也明確解釋。這也符合複變的特點。他們能理解課本就很好了。經驗表明，

對於中大的（大部分）學生，只要預先知道題目，他們都會認真準備。

現在的問題是，少部分不認真準備的怎麼辦。還有，認真準備了，但小考時，一時想不起來怎麼辦。

3. 每週課後補考。補考不限次數，每補考一次扣整學期 1% 的分。但期末時一定要都通過。實際上，在我嘗試小考制度的四個班中，補考的學生相當少。因為反正預先知道題目，又知道反正一定要全對通過，拖延毫無益處。

通過以上設計，學生可以說平時就被 motivated。基本上可以保證每個人都學到課程主要的東西。而且很多對畢業有壓力的學生告訴我說，能預先知道自己這門課一定能過的感覺很好。考試週沒有期末考試的感覺也很好。

及時回饋：為了能做到 instant feedback, 我決定小考當場改出來。這對學生是很刺激的一件事情。即，在上課之間，他們就知道我要考什麼。然後，十幾分鐘之後，他們馬上知道自己過或沒過。

本學期我複變班上有 51 人。為了當場改出來，我找了五名助教（當然不是系上安排的），加上我自己，通常每份小考判斷過否一分鐘就夠了。所以我基本上控制十分鐘改完。一般會剩幾份交的慢的，留到課後其他人補考時再看。

以上設計是照顧大部分將來不準備做數學家的學生。目標也只是課程中的基本內容。對於少數準備走學術路線的同學，當然要讓他們得到培養。這主要在於（1）另外找助教在週三晚加開自由參加的習題課，講比較難和進階的題目。（2）（用一些設計）鼓勵他們自己完成更多的習題。（3）單獨約他們交流鼓勵。

下面我稍微解釋一下習題與一對一的交流。

習題：我請他們從課本上自己選擇要做的題目和數量。但每人每週至少十題。當然很多人就剛好做十題。然後我宣布題目數量最多的同學在作業這個 category 的總分會被 scale 到 100%。其他人按比例記分。這樣就能激發部分同學的競爭心。（實際設計比這裡解釋的要複雜一些，見附件 G，是為了避免極端情況出現。但大意如此。）

然後改作業我設計一套同學互改的辦法。即每人每次會隨機的領到一份其他同學的作業來改。（作業是匿名的。當然有相配套的記分方式。）這樣子做似乎好處多多。首先是助教不用改作業；助教改作業的效果一般其實是比較差的。其次是每個人改別人作業時都高度緊張，往往比自己做作業還認真。第三就是，我認為他們看到別人的作業，不管是比自己好或差，都是一種良性的刺激。

這套互改作業的想法來源於我在琢磨台灣一些“翻轉教學”時得到的啟發：現在的有些學生不在乎家長給的壓力，也不在乎老師給的壓力。但他們非常在乎同學怎麼看自己。所以，peer pressure 的力量是很大的。

一對一交流：一般而言我會設計多種這樣的機會。本學期複變課上，我有嘗試利用期中考。我開學時即告訴他們，亞洲教育普遍是獨立思考的能力不足。所以，期中考就是請大家在指定日期交十個問題上來。我會根據他們問的問題來判斷他們思考的深度來打分。

然後每週一，週三下課後我會約五名同學來辦公室逐一討論他們的問題。這是一個很愉快的經歷。他們問出來一些可稱為“驚艷”的問題。印象深刻的一位是，他說，既然複變以前在設計飛機機翼上有應用，那麼今天是否可以在很夯的 VR (virtual reality) 做類似的設計。（VR 是 HTC 現在轉型所專注的未來領域。）

對大部分同學而言，我會針對他們問問題所反應出來的思維方式，給一些建議和提醒。一個普遍問題是，他們有問題，但少有去做解決問題的努力，因此反應出來問題比較淺顯。很多同學都同意這一點切中他們的要害。

另外一個單獨與學生溝通的方式是 email。在現在這當然是古老的方式了。本學期第一次小考，因為還沒數學可考，我請他們每人寫一個簡單的自傳，email 給我當小考。其實我的初衷是要他們的真正的 email address 而已。因為以前發生過我要找學生找不到。Portal 裡留的訊息根本不是他們真的使用的。（也學學校在這一點上可以改進一下。）

他們的自傳讓我大大豐富了對中大學生的認識。一位林同學說他的目標是成為頂尖的資訊人才。我回信有簡單的鼓勵他一下。開學後我注意到他總是坐第一排，課後常來問問題，是班上與我互動最多的學生之一。

一副標準好學生的樣子。開學幾個禮拜過後系辦秘書發 email 提醒所有林同學的授課老師說，該同學有自閉症，請關注他如果有障礙，請及時處理。我當然很驚訝，也認識到每個學生的標籤背後其實都有一個熱情的夢想。我希望學生上過每一門課後都能離夢想近一點。

謝謝大家！

Shifting Formulas:

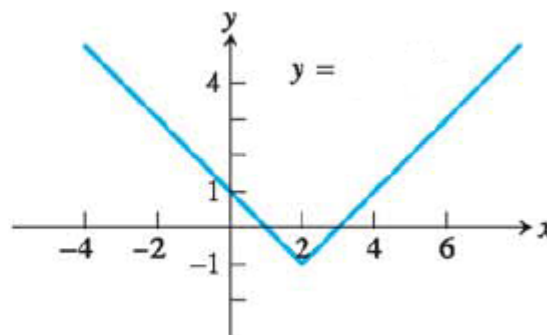
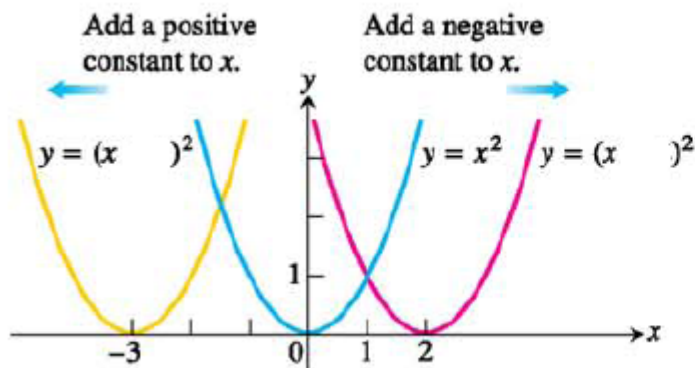
- $y = f(x) + k$: shift the graph of $y = f(x)$ (up or down) by _____
- $y = f(x + k)$: shift the graph of $y = f(x)$ to the (left or right) by _____

Reflecting the functions:

- $y = -f(x)$: We reflect the graph of $y = f(x)$ _____
- $y = f(-x)$: We reflect the graph of $y = f(x)$ _____

Easy exercise: Graph (1) $y = \sqrt{x}$, (2) $y = \sqrt{2-x}$ and (3) $y = -\sqrt{x+2}$ in the same coordinate system.

Practice: Complete the following:



Now we talk about stretching $F(x) = c_1 f(c_2 x)$:

- c_1 is the “outer, vertical” stretching.
- c_2 is the “inner, horizontal” stretching.

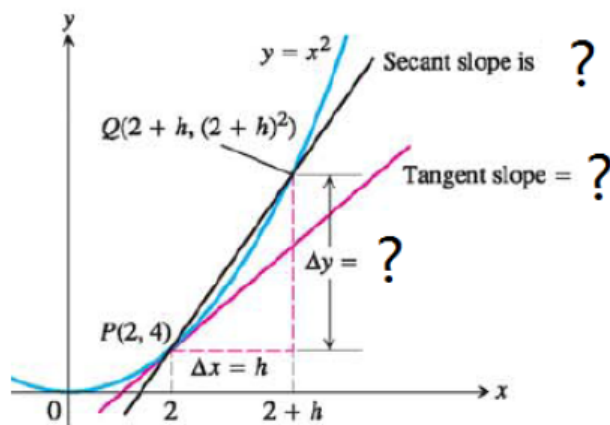
Exercise:

- (1) First graph (a) $y = \sqrt{x}$, (b) $y = \sqrt{3x}$, and (c) $y = \sqrt{x/3}$ in one coordinate system;
- (2) Then graph (a) $y = \sqrt{x}$, (b) $y = 3\sqrt{x}$, and (c) $y = \sqrt{x}/3$ in one coordinate system.

EXAMPLE 3 Find the slope of the parabola $y = x^2$ at the point $P(2, 4)$. Write an equation for the tangent to the parabola at this point.

Solution We begin with a secant line through $P(2, 4)$ and $Q(2 + h, (2 + h)^2)$ nearby.

Secant slope = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$



Recall the point-slope equation of a line: Through (a, b) with slope m .

Exercise: Find an equation of the tangent line for $y = x^3$ at $(2, 8)$.

(Hint: You may need the formula $(s + t)^3 = s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3$.)

If you finish the above exercise quickly, then do the same for a more challenging problem: $y = \sqrt{4 - x}$ at $x = 0$.

$$9. y = (2x + 1)^5$$

$$11. y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$$

$$13. y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$$

$$15. y = \sec(\tan x)$$

$$50. y = \cos\left(5 \sin\left(\frac{t}{3}\right)\right)$$

$$52. y = \frac{1}{6}(1 + \cos^2(7t))^3$$

$$54. y = 4 \sin(\sqrt{1 + \sqrt{t}})$$



丁羿婷



王保元



吳昆霖



吳牧庭



沈怡君



沈柏亨



林家兆



侯喻翔



張詠竣



張雅婷



陳彥廷



陳祐楷



黃晨凱



黃慈汶



劉鴻明



潘志軒



王祥兆



李明怡



季士翔



翁廷釁



許凱博



陳建育



楊宜儒



蔡佳縉



王麒翰



李品穎



林以晉



高浩銓



郭東杰



傅冠綺



葉曉雲



蔡承哲



江子杰



李庭佑



林志泓



張維



郭鈞哲



彭如顯



詹世安



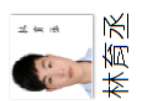
蔡承桓



江村志



李御銓



林育丞



張家豪



陳宗良



游軒宇



廖婉汝



蔡鎮中



江育齊



李蕎芸



林孟玄



張智瑞



陳泓佑



黃甫



劉又瑋



蔣詠軒



池珈瑩



杜宇平



林柏均



張智銓



陳芷平



黃子明



劉宇綸



鄧厚威



吳庭



汪玉堃



林韋辰



張欽崇



陳建羽



黃建智



劉昱廷



鄧厚威





國立中央大學
National Central University

方向老師勛鑒：

為增進教師教學與學生學習成效，教務處持續強化與改進線上教學評量。102 學年度第一學期的教學評量統計結果已經完成了。感謝您上一學期的辛苦教學，您教學評量之綜合評分優居貴系所前 10%，深獲學生好評。特此，向您表示崇高之敬意與謝意！

中央大學秉持「誠樸」的精神，在研究上追求學術卓越，在教學上以培育通識與專業兼備的全方位人才為目標，您的辛勞與教學熱忱將是中大邁向國際一流大學的重要因素。

謝謝您！

肅此 順頌

教 安

教務長

陳志臣

敬啟

103 年 3 月 31 日

Quiz 08 (2017-04-12) Name(Print) _____

1. State and prove the Liouville theorem.

2. State and prove the mean value theorem.

3. State and prove the maximum modulus theorem.

2017 複變總則

01. 05-24 端午節前，提前三週期末考試。佔總分 20%。
02. 考試題目會預先給大家。
03. 考試只分 pass or fail。全對為 pass；不然就 fail。
04. Fail 之後每週三晚上 6pm-8pm 補考（共兩次補考）。最後一次不過則整門課不給分。
05. 期末考每補考一次扣整學期 3%的分數。
06. 03-20 期中考為每人提交至多十個問題。我會根據提的問題來判斷平時思考的程度。佔總分 20%。
07. 作業習題：每人自己選擇每週要完成的習題。但至少是每週十題。
08. 每週三上課前交習題。
09. 習題一定要用習題紙寫。
10. 習題上請不要寫名字。用一張小貼紙貼上。
11. 習題相互改。每人週三下課時領一份習題改。下週三上課前交回。
12. 判錯時需用紅筆指出詳細理由。
13. 改作業時字跡不清楚或版面整理不清楚可直接判錯。
14. 自己做習題時可與同學討論；改習題時不可以討論。
15. 習題佔總分 20%。題數最多的前五名被調整到習題的滿分。其他人按第五名題數的比例計算。
16. 小考：每週三開始上課時小考。
17. 小考題目會預先給大家。
18. 小考只分 pass or fail。全對為 pass；不然就 fail。
19. Fail 之後每週三課後補考。缺席算補考一次不過。
20. 每補考一次扣整學期 1%的分數。
21. 到最後一次課（六月七號）所有小考要全過整學期才会有分。
22. 小考佔總分 50%。
23. 第一次小考：請大家週三（二月十五號）上課之前給我發一個 email。Email 的 subject 要有自己的姓名。Email 內容為至少五十字的自我簡介。
24. Office Hour: 週四 3-5pm.
25. 考試週無任何課程/考試。
26. 每週三晚上習題課。自願參加。